

# Podręcznik użytkownika programu AxisVM w zakresie niestandardowych macierzy sztywności

April 13, 2018

## Abstrakt

Celem niniejszego przewodnika jest przybliżenie użytkownikom programu AxisVM podstawowych założeń wybranych i powszechnie stosowanych teorii płyt. Przedstawione rozważania pogłębione zostaną o przykłady obliczeniowe.

Przewodnik należy traktować jako wprowadzenie do teorii płyt. Materiał dydaktyczny przedstawiony w przewodniku bazuje na wykładach autorstwa **Carlos A. Felippa** [2]. Część rysunków zamieszczonych w podręczniku zaczerpnięto z przywołanych wykładów. W celu uzyskania szczegółowych informacji na temat teorii płyt odsyłamy użytkownika do literatury przedmiotu i dokumentu źródłowego wykładów:

<https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.Ch20.d/AFEM.Ch20.pdf>

## 1 Podstawy teoretyczne

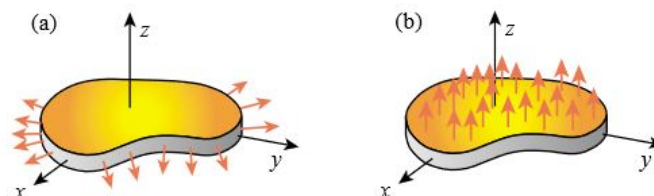
W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawy teoretyczne teorii płyt. Pogrubioną czcionką zaznaczono kluczowe i ważne informacje. Czytelnik, który zainteresowany jest tylko praktycznym zastosowaniem niestandardowych macierzy sztywności w programie AxisVM może pobieżnie przejrzeć tekst rozdziału bez narażania się na pominięcie istotnych informacji.

### 1.1 Równania powłok płaskich

W tym rozdziale omówiony zostanie płaski stan naprężenia dla płyt. Płaski stan naprężenia występuje w przypadku gdy obciążenie zewnętrzne działa na powierzchnię środkową płyty zgodnie ze schematami obciążenia przedstawionymi na Rys. 1.

W takich warunkach obciążenia rozkład naprężeń i odkształceń na grubości elementu przyjmuje się że jest stały. Zakładając dodatkowo liniowo sprężystą odpowiedź statyczną płyty możemy zadanie 3D łatwo zredukować do zadania 2D.

## 1.1 Równania powłok płaskich

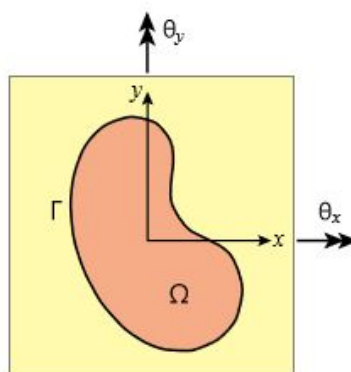


Rysunek 1: Płyta płaska dla przypadku: (a) płaskiego stanu naprężenia, (b) zginania. (Carlos A. Felippa)

### 1.1.1 Równania kinematyczne

Rozważmy ciało 3D posiadające ustalony kształt w płaszczyźnie  $x$ - $y$  i ograniczenie powierzchniami  $z = t_{gorna}$  i  $z = t_{dolna}$ , tak że każdy punkt ciała 3D znajduje się w przedziale  $t_{gorna} \geq z \geq t_{dolna}$ . Dla uproszczenia zapisu przyjęte zostaną następujące oznaczenia  $t_t = t_{gorna}$  i  $t_b = t_{dolna}$ . Przeszczenie dowolnego punktu po kierunku  $x$ ,  $y$  i  $z$  jest opisane odpowiednio przez funkcje  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  i  $z = z(x, y, z)$ .

Postawione zadanie polega na aproksymacji pola przemieszczeń płyty przez określenie związków kinematycznych dla powierzchni referencyjnej określonej przez punkty o współrzędnej  $z = 0$ . Taką powierzchnię nazywamy powierzchnią środkową płyty. Zakładając występowanie małych przemieszczeń i zachowanie płaskiego przekroju płyty po deformacji możemy uznać, że przemieszczenia punktu  $P(x_p, y_p, z_p)$  mogą być opisane przez obroty  $\theta_x(x_p, y_p)$  i  $\theta_y(x_p, y_p)$  i równania ruchu ciała sztywnego dla punktu  $(x_p, y_p, 0)$ . Powyższe obroty przyjęto jako dodatnie jeżeli są zgodne z oznaczeniem na Rys. 2.



Rysunek 2: Dodatnie obroty. (Carlos A. Felippa)

Zgodnie z powyższymi zdefiniowanymi założeniami przybliżone pole przemieszczeń dowolnego punktu płyty  $P(x, y, z)$  przyjmuje postać



## 1.1 Równania powłok płaskich

$$\begin{aligned}
 u(x, y, u) &\cong u_0(x, y) + z\theta_y(x, y), \\
 v(x, y, u) &\cong v_0(x, y) - z\theta_x(x, y), \\
 w(x, y, u) &\cong w_0(x, y),
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie indeks dolny "0" odnosi się do wartości mierzonych dla powierzchni środkowej. W wyprowadzeniach wprowadziliśmy uproszczenia notacji stosując zapis  $f$  zamiast  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , kiedy argumenty są trywialne. Małe odkształcenia związane z powyższymi równaniami możemy wyznaczyć stosując dobrze znane równania sprężystości:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_{0x} + z\kappa_x, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \varepsilon_{0y} + z\kappa_y, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = \gamma_{0xy} + z\kappa_{xy}, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Niezerowe odkształcenia są zazwyczaj grupowane jako odkształcenia w płaszczyźnie i odkształcenia z płaszczyzny. Poniżej przedstawiono zapis stanu odkształcenia w płaszczyźnie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa}. \tag{3}$$

### 1.1.2 Równania fizyczne i równania równowagi

Z niezerowymi odkształceniami związane są odpowiednie składowe naprężenia:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . Dla płyty izotropowej i homogenicznej (jednorodnej) w płaskim stanie naprężenia związek naprężenie - odkształcenie dla każdego punktu płyty jest zdefiniowany przez prawo Hooke'a, por. równanie (4) dla naprężeń w płaszczyźnie i równanie (5) dla naprężeń z płaszczyzny

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\kappa}, \tag{4}$$



## 1.1 Równania powłok płaskich

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}, \quad (5)$$

gdzie  $G$  jest modułem ścinania. W równaniach (4) i (5) zastosowano notację zbliżoną do notacji Kelvina-Voighta z tą różnicą, że zamieniono notację dla  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  przyjmując ostatecznie:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}) \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6). \quad (6)$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

i

$$\begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Siły wewnętrzne wyznaczono całkując po  $z$  odpowiednie składowe naprężenia, uwzględniając przy tym przyjętą konwencję znakowania, patrz Rys. 3. Konwencja znakowania dla płaskiego stanu obciążenia jest zgodna z definicją naprężeń dodatnich, stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{t_b}^{t_t} \boldsymbol{\sigma} dz = (t_t - t_b) \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} (t_t^2 - t_b^2) \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\kappa} \\ &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{t_b}^{t_t} z \boldsymbol{\sigma} dz = \frac{1}{2} (t_t^2 - t_b^2) \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{3} (t_t^3 - t_b^3) \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\kappa} \\ &= \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{t_b}^{t_{top}} \boldsymbol{\tau} dz = (t_t - t_b) \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (9)$$

Równania (9) można zapisać w formie macierzowej jako

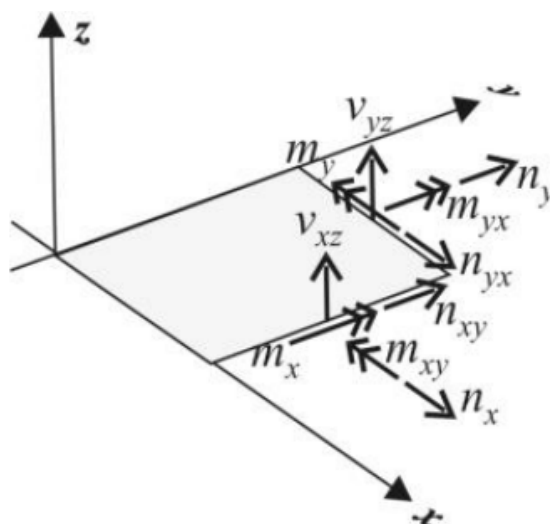
$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{S} \boldsymbol{\gamma}, \quad (10)$$

lub

## 1.1 Równania powłok płaskich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ & & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (11)$$

W równaniu (11) podmacierze  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  definiują odpowiednio stan membranowy i sztywność giętną elementu płytowego podczas gdy podmacierz  $\mathbf{B}$  reprezentuje sprzężenie efektu giętnego i membranowego. Stąd, jeżeli podmacierz  $\mathbf{B}$  jest niezerowa i płyta poddana jest tylko deformacjom w płaszczyźnie ( $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ ) to momenty będą obecne i takie samo sprzężenie będzie obowiązywać na odwrót. Wyraźnie widać, że  $\mathbf{B}$  będzie macierzą zerową wtedy i tylko wtedy gdy  $|t_{dolna}| = |t_{gorna}|$ . Innymi słowy, dla elementów powłokowych o stałej grubości podmacierz  $\mathbf{B}$  reprezentuje efekty mimośrodowe. Podmacierz  $\mathbf{S}$  zawiera warunki sztywności ze względu na ścinanie.



Rysunek 3: Konwencja znakowania momentów zginających.

Wyprowadzenie równań równowagi wewnętrznej opiera się na analizie wydzielonych elementów różnicowych powierzchni środkowej  $dx \times dy$  zgodnych z układem osi  $x, y$ , patrz Rys. 3. Pomijając szczegółowe wyprowadzenia różniczkowe równania równowagi przyjmują następującą postać



$$\begin{aligned}\Sigma F_x &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \\ \Sigma F_y &: \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y = 0, \\ \Sigma F_z &: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0, \\ \Sigma M_x &: \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0, \\ \Sigma M_y &: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \Sigma M_z &: M_{xy} - M_{yx} = 0.\end{aligned}\tag{12}$$

## 1.2 Korekta ścinania

W płytach jednorodnych poprzez analogię do teorii belkowej Eulera-Bernoulli'ego przyjmujemy, że naprężenia  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  mogą mieć rozkład paraboliczny na grubości elementu. Założenie to stoi w sprzeczności z założeniami równań kinematycznych które mówią, że odkształcenia styczne i naprężenia styczne są stałe na wysokości. Stąd, wartość sztywności przy ścinaniu musi być skorygowana. Jeżeli ciało 3D jest opisywane przez pojedynczą powierzchnię wtedy wszystkie punkty wzdłuż przekroju tego ciała (płyty) są reprezentowane przez punkt przecięcia przekroju z powierzchnią referencyjną  $z = 0$ . W przypadku gdy wartość naprężeń w tym punkcie nie odpowiada rzeczywistemu rozkładowi naprężeń wyznaczona energia odkształcenia w tym punkcie może być przeszacowana lub niedoszacowana.

Poniżej, na przykładzie naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  dla płyty w ustalonym punkcie jej powierzchni środkowej  $(x_p, y_p)$ , zostanie przedstawiona dwuetapowa metoda pozwalająca na wyznaczanie współczynnika korekty ścinania. Założmy, że paraboliczny rozkład naprężeń na grubości elementu  $\tau_{xz}(z) = \tau_{xz}(x_p, y_p, z)$  przyjmuje postać:

$$\tau_{xz}(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2.\tag{13}$$

Ponieważ warunki równowagi wymagają aby rozkład naprężeń stycznych był symetryczny względem powierzchni środkowej płyty, naprężenia styczne zanikają na górnej i dolnej powierzchni płyty oraz przyjmują wartość maksymalną na jej powierzchni środkowej. Ponadto, funkcja naprężeń stycznych pocalkowana po grubości płyty musi odpowiadać wartości siły poprzecznej  $Q_x$ . Podsumowując założona funkcja musi spełniać następujące kryteria:



## 1.2 Korekta ścinania

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}(t_t) &= 0, \\
 \tau_{xz}(t_b) &= 0, \\
 \left. \frac{\partial \tau_{xz}(z)}{\partial z} \right|_{z=(t_t+t_b)/2} &= 0, \\
 \int_{t_b}^{t_t} \tau_{xz}(z) dz &= Q_x.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Stosując przekształcenia matematyczne otrzymamy

$$\tau_{xz}(z) = Q_x(C_0 + C_1z + C_2z^2), \tag{15}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \left( \frac{1}{3} (t_t^3 - t_b^3) - \frac{1}{2} (t_t^2 - t_b^2) (t_b + t_t) + t_b t_t (t_t - t_b) \right)^{-1}, \\
 C_1 &= -C_2(t_t + t_b), \\
 C_0 &= C_2 t_t t_b.
 \end{aligned} \tag{16}$$

W kolejnym kroku należy znaleźć współczynnik korekty ścinania  $\xi_x$ , który zapewni zgodność między gęstością naprężeń ścinających wyznaczonych jak dla rozkładu stałego  $\Pi_c$  i rozkładu parabolicznego  $\Pi_p$ . Wykorzystując, że dla rozkładu parabolicznego i rozkładu stałego odkształcenia styczne wynoszą odpowiednio  $\gamma_{xz}(z) = \tau_{xz}(z)/G$  i  $\gamma_{xz} = \tau_{xz}/(\xi_x G)$  możemy zapisać

$$\begin{aligned}
 2\Pi_p &= \int_{t_b}^{t_t} \tau_{xz}(z) \gamma_{xz}(z) dz = \int_{t_b}^{t_t} \frac{\tau_{xz}(z)^2}{G} dz, \\
 2\Pi_c &= \int_{t_b}^{t_t} \tau_{xz} \gamma_{xz} dz = \int_{t_b}^{t_t} \frac{\tau_{xz}^2}{\xi_x G} dz.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Korzystając z warunku  $\Pi_c = \Pi_p$  otrzymamy wartość współczynnika korekty ścinania dla kierunku  $x$  równą  $\xi_x = 5/6$ . Takie same wyprowadzenia można przeprowadzić dla kierunku  $y$ , w wyniku których otrzymamy wartość współczynnika korekty ścinania równą  $\xi_y = 5/6$ . Uwzględniając przeprowadzone przekształcenia i modyfikacje, równanie (5) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x G & 0 \\ 0 & \xi_y G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_s^* \boldsymbol{\gamma}. \tag{18}$$

W związku z tym mamy

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = (t_t - t_b) \mathbf{Q}_s^* \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S}^* \boldsymbol{\gamma}, \tag{19}$$



### 1.3 Teoria płyt Kirchhoffa-Love'a

stąd macierze ABD dla teorii płyt Mindlina-Reissnera przyjmują postać

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \\ & & \mathbf{S}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

W zapisie rozszerzonym

$$\begin{pmatrix} Nx \\ Ny \\ Nxy \\ Mx \\ My \\ Mxy \\ Qx \\ Qy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} S_{44}^* & S_{45}^* \\ S_{45}^* & S_{55}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

gdzie dla płyty zhomogenizowanej (jednorodnej) o stałej grubości możemy przyjąć

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (t_t - t_b)Q_{m_{ij}}, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2}(t_t^2 - t_b^2)Q_{m_{ij}}, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3}(t_t^3 - t_b^3)Q_{m_{ij}}, \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie  $S_{ij}^*$  są skorygowanymi wartościami sztywności przy ścinaniu. **Postać i znaczenie parametrów  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  i  $S_{ij}^*$  wykorzystanych w równaniu dla przekroju płyty (21) zostało bezpośrednio wprowadzone w programie AxisVM, patrz Rys. 4.**

W przypadku płyt niejednorodnych główne kroki przy wyznaczaniu współczynników korekty ścinania są takie same, lecz całkowanie po grubości płyty jest o wiele bardziej pracochłonne.

### 1.3 Teoria płyt Kirchhoffa-Love'a

Teoria znana jest również jako "klasyczna teoria płyt" lub "teoria płyt cienkich" charakteryzuje się tym, że **nie uwzględnia deformacji poprzecznej**. Jest stosowana wtedy kiedy jej ugięcia nie są porównywalne z jej grubością (są od niej mniejsze).



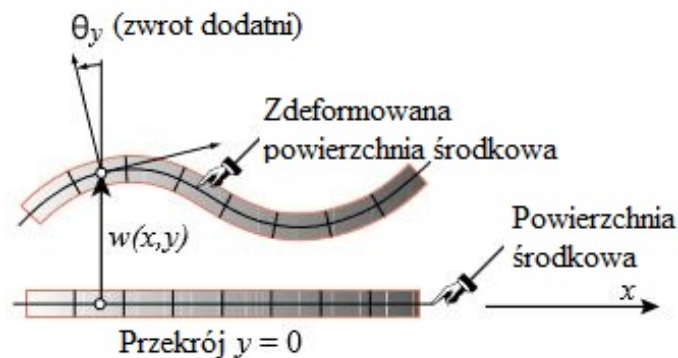
### 1.3 Teoria płyt Kirchhoffa-Love'a

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_{xz} \\ v_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & & & \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & & & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & & & \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & & & \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & & & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & & & \\ & & & & & & S_{44} & S_{45} & \\ & & & & & & S_{45} & S_{55} & \\ 0 & & & 0 & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Rysunek 4: Macierz ABD w programie AxisVM, z skorygowanymi sztywnościami ścinania.

Równania kinematyczne teorii płyt Kirchhoffa-Love'a są rozwinięciem teorii belkowej Euler'a-Bernoulli'ego na przypadek dwuosiowego zginania. Oznacza to, że **normalne to powierzchni środkowej pozostają normalne do zdeformowanej powierzchni odniesienia**, patrz Rys. 5. To założenie związane jest z obrotami względem linii ugięcia:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (23)$$



Rysunek 5: Założenia teorii płyt Kirchhoffa-Love'a. (Carlos A. Felippa)

Podstawiając równanie (23) do równania (2) otrzymamy poniższą zależność

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_{0x} + z\kappa_x, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_{0y} + z\kappa_y, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{0xy} + 2z\kappa_{xy}, \\
 \gamma_{xz} &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
 \gamma_{yz} &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

**Uwagi do teorii płyt Kirchhoffa-Love'a:** Należy zauważyć, że niektóre niespójności teorii płyt Kirchhoffa-Love'a pojawiają się przy bliższym przyjrzeniu się równaniom (24). Przykładowo, odkształcenia ścinające poprzeczne są zerowe, co automatycznie implikuje  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . W konsekwencji prowadzi to do tego że siły poprzeczne również są zerowe:  $Q_x = Q_y = 0$ . Niemniej siły te są konieczne ze względu na równania równowagi (12). Podobnie,  $\varepsilon_z = 0$  wskazuje na to, że płyta jest w płaskim stanie odkształcenia podczas gdy w rzeczywistości płaski stan naprężenia ( $\sigma_z = 0$ ) jest bliższy prawdzie. Dla płyt jednorodnych **płaski stan odkształcenia i płaski stan naprężenia występuje łącznie wtedy i tylko wtedy gdy współczynnik Poissona jest równy zero**. Wymienione niespójności były tematem wielu artykułów w czasopiśmie naukowych dotyczących mechaniki stosowanej. Założenie o zerowych naprężeniach stycznych będzie prawdziwe wtedy, kiedy rzeczywista wartość tych naprężeń będzie znacząco mniejsza od pozostałych naprężeń (jest to przypadek płyty cienkiej). Jeżeli ten warunek nie jest spełniony wtedy należy zastosować teorię płyt Mindlina-Reissnera, która uwzględnia energię odkształcenia postaciowego pierwszego rzędu.

Pomimo to teoria Kirchhoffa-Love'a posiada kilka praktycznych zalet. W przypadku niewystępowania sił poprzecznych nie ma konieczności określania składowych podmacierzy  $\mathbf{S}$  w równaniach (11) i (10). Niezbędne wartości sił poprzecznych są tylko podyktowane przez równania równowagi i ich wyznaczenie przeniesione jest do poziomu post-procesora.

Podsumowując należy zauważyć, że dla przypadku  $|t_b| = |t_t|$  przekształcenie równań równowagi momentów względem osi  $x$  i  $y$  w równaniach (12) dla  $Q_x$  i  $Q_y$  z uwzględnieniem równania (10) i (3), doprowadzi do równania biharmonicznego, wyprowadzonego po raz pierwszy przez Lagrange'a w 1813 roku:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z, \tag{25}$$



#### 1.4 Teoria Mindlina-Reissnera

---

lub stosując  $H = D_{12} + 2D_{66}$ ,

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z, \quad (26)$$

podczas gdy to samo równanie tylko w słynnej książce Timoschenki [3] przyjmuje postać,

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z, \quad (27)$$

gdzie  $H = D_1 + 2D_{xy}$ .

### 1.4 Teoria Mindlina-Reissnera

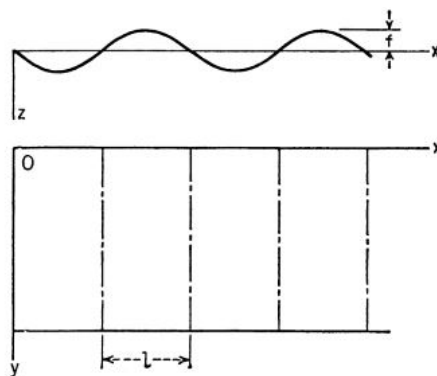
Teoria znana jest jako "teoria ścinania pierwszego rzędu" lub jako "teoria płyt cienkich i umiarkowanie grubych". Teoria ta pozwala uwzględnić wpływ ścinania na przemieszczenia i jest stosowana wtedy kiedy grubość płyty jest cienka lub umiarkowanie gruba. Podstawowa różnica w stosunku do teorii Kirchhoffa-Love'a wynika z tego, że zwolnione są obroty  $\theta_x$  i  $\theta_y$  stąd stan odkształcenia nie jest tylko definiowany przez funkcję ugięcia  $w$ . W tym przypadku równania (2) mogą być zastosowane do opisu stanu odkształcenia/przemieszczenia. W konsekwencji odkształcenia postaciowe  $\gamma_{xz}$  i  $\gamma_{yz}$  są niezerowe jak również naprężenia ścinające  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . **Prowadzi to do tego, że wartości podmacierzy  $S$  w równaniu (11) łącznie z wartością współczynnika korekty ścinania powinny być poprawnie wyznaczone.** Warto w tym miejscu nadmienić, że teoria Mindlina-Reissnera może być również stosowana do płyt cienkich. **W przypadku gdy powłoka jest cienka jej sztywność na ścinanie jest duża (w zasadzie nieskończenie duża zgodnie z założeniem teorii Kirchhoffa).** W tym miejscu użytkownik nie mający innego pomysłu może przyjąć, że wartości skorygowanych sztywności na ścianie w obu kierunkach ( $S_{44}^*$  i  $S_{55}^*$ ) są równe nieskończoności. Wtedy, otrzymane wyniki będą zgodne z wynikami otrzymanymi z teorii Kirchhoffa-Love'a. Jeżeli powłoka nie jest cienka wtedy obliczenie współczynników korekty ścinania dla obu kierunków jest nieuniknione.

## 2 Przykłady

W programie AxisVM zakłada się, że narzędzie pozwalające na definicję niestandardowych macierzy sztywności ABD będzie wykorzystywane przez użytkowników potrafiących podać potrzebne sztywności wyznaczone w oparciu o własne obliczenia lub z literatury.

### 2.1 Przykład 1 : Zginanie blachy fałdowej

Przykład został opracowany na podstawie sugestii dotyczących sztywności zginania blach falistych w [3, p. 367].



Rysunek 6: Parametry blachy falistej. (Timoshenko)

Chcemy aby obszar naszego zadania tj. domena miała sztywność blachy fałdowej przedstawionej na Rys. 6. Zakładamy model płytowy co oznacza brak efektów stanu membranowego. W tym przypadku nie musimy określać wartości  $A_{ij}$  stąd odpowiednie wpisy w panelu niestandardowej macierzy sztywności w programie AxisVM będą nieaktywne. Materiał płyty określony będzie przez stałe materiałowe  $E$  i  $\nu$ , a jej geometria przez grubość  $h$ . Parametr  $z$  określony równaniem (28),

$$z = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (28)$$

jest funkcją pofałdowania, a parametr  $s$  jest długością łuku jednej fałdy. Zgodnie z sugestiami dotyczącymi sztywności płyty:



## 2.2 Przykład 2 : Zginanie płyty z otworami

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{l}{s} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\
 D_{22} &= EI, \\
 D_{12} &\cong 0, \\
 H &= 2D_{66} = \frac{l}{s} \frac{Eh^3}{12(1+\nu)},
 \end{aligned} \tag{29}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 s &= l \left( 1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right), \\
 I &= \frac{f^2 h}{2} \left[ 1 - \frac{0.81}{1 + 2.5 \left( \frac{f}{2l} \right)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{30}$$

Przykładowo, jeżeli przyjmiemy  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $l = 50 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$  i  $f = 5 \text{ cm}$ , wtedy macierz  $D$  wg. równania (21) i zgodnie z Rys. 4 równa się

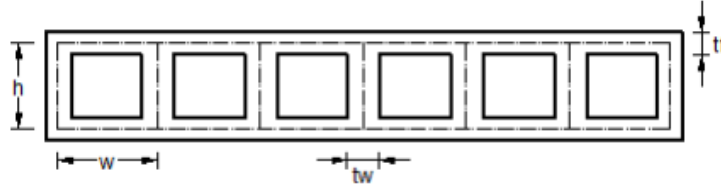
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1876.76 & 0. & 0. \\ 0. & 51195.65 & 0. \\ 0. & 0. & 656.86 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Niestety, źródło nie podaje sugestii dotyczących określenia sztywności przy ścinaniu  $S_{ij}$ . Niemniej, akceptowalnym przybliżeniem będzie (dla naszego przykładu) przyjęcie  $S_{44}^* = S_{55}^* = \frac{5}{6} Gh$ , gdzie  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  jest modułem ścinania. Ostatecznie macierz sztywności analizowanej płyty przyjmuje poniższą postać:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1876.76 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 51195.65 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 656.86 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 6730.76 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 6730.76 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

## 2.2 Przykład 2 : Zginanie płyty z otworami

Ropatrzymy płytę z otworami które są równoległe rozłożone do osi  $y$  lokalnego układu współrzędnych domeny. Założmy że  $E$  i  $\nu$  są stałymi sprężystości materiału. Zgodnie z sugestiami Basu i Dawson-a [1], sztywności płyty z otworami przedstawionej na Rys. 7 są zdefiniowane jako:



Rysunek 7: Parametry płyty z otworami.

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{Et_f h^2}{2(1 - \nu^2)}, \\
 D_{22} &= D_{11} \left(1 + \frac{t_w h}{t_f w}\right), \\
 D_{12} &= \nu D_{11}, \\
 D_{66} &= \frac{Gt_f h^2}{2}, \\
 S_{44} &= \frac{2Et_f^3}{w^2(1 + 2(h/w)(t_f/t_w)^3)}, \\
 S_{55} &= Gt_f h(1 + t_f/h)/(t_f w/t_w),
 \end{aligned} \tag{33}$$

gdzie  $G$  jest modułem ścinania. Przyjmując  $E = 2860kN/cm^2$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $w = 10cm$ ,  $t_w = 5cm$ ,  $t_f = 4cm$ ,  $h = 15cm$  i zakładając współczynnik korekty ścinania równy  $5/6$  otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1340625. & 268125. & 0. & 0. & 0. \\ 268125. & 3854296.8 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 536250. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1202.9 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 9434. \end{bmatrix}. \tag{34}$$

## Literatura

- [1] AKj Basu and JM Dawson. Orthotropic sandwich plates. In *Inst Civil Engineers Proc, London/UK/*, 1970.
- [2] Carlos A. Felippa. Kirchhoff plates : Field equations. <https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.Ch20.d/AFEM.Ch20.pdf>. (Accessed on 01/30/2018).
- [3] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1959.